极限运算准则

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

在本节的讨论中，记号 “lim” 没有标明自变量的变化过程. 下面的定理对于 $x \to x_0$ 及 $x \to \infty$ 都是成立的.

定理 1

两个无穷小量之和仍是无穷小.

定理 1

两个无穷小量之和仍是无穷小.

- $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists \delta_1 > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1, |\alpha| < \frac{\epsilon}{2}$;
- $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0, \exists \delta_2 > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2, |\beta| < \frac{\epsilon}{2}$;
- $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\},$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta, |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \epsilon$;

推论 1

有限个无穷小之和也是无穷小.

例

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

例

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

定理 2

有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

定理 2

有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

- 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界.
  $\exists M>0, \forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta_1), |f(x)|<M$;
- 任意给定 $\epsilon>0$，取 $\epsilon_1=\frac{\epsilon}{M}, \exists\delta_2>0, \forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta_2), |g(x)|<\frac{\epsilon}{M}$;
- 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，$|f(x)\cdot g(x)|<\frac{\epsilon}{M}\cdot M=\epsilon$.

例

求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 3x}{x}$

推论 1

常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2

有限个无穷小的乘积是无穷小.

定理 3

如果 $\lim f(x) = A$, $\lim f(x) = B$, 则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$;

(3) 若又有 $B \neq 0$,

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}.$$

证明.

证明 (2).

因为 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 故 $f(x) = A + \alpha$, $g(x) = B + \beta$, 其中 α, β 为无穷小.

证明.

证明 (2).

因为 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 故 $f(x) = A + \alpha$, $g(x) = B + \beta$, 其中 α, β 为无穷小.

$$f(x) \cdot g(x) = \left(A + \alpha\right) \cdot (B + \beta) = A \cdot B + \underbrace{A\beta + \alpha B + \alpha \cdot \beta}_{\gamma}$$

结合定理 1、推论 1, γ 为无穷小. 因此

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A + B.$$

$\square$

推论 1

如果 $\lim f(x)$ 存在, c 为常数, 则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

推论 2

如果 $\lim f(x)$ 存在, $n \in \mathbb{N}_+$,

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

定理 4 (数列极限的四则运算法则)

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n \pm y_n] = A \pm B$;

(2) $\lim[x_n \cdot y_n] = A \cdot B$;

(3) 若又有 $y_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $B \neq 0$,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

定理 5

如果 $\psi(x) \geq \phi(x)$, 且有 $\lim \psi(x) = A$, $\lim \phi(x) = A$, 则 $A \geq B$.

- **极限四则运算 (1) 结合极限的保号性.**

多项式极限

设有 n 次多项式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0).$$

由极限四则运算及推论

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\right) \\
&= \lim_{x\to x_0} a_0x^n + \lim_{x\to x_0} a_1x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_n \\
&= a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n + a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1} + \cdots + a_n \\
&= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0).
\end{aligned}$$

例

求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+2)$.

例

求极限 $\lim_{x\to 1}(x^2-2x+2)$.

解

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+2)=1^2-2\cdot 1+2=1.$$

例

求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x-7}{2x-1}$.

例

求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x-7}{2x-1}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+x-7)=2^3+2-7=3$,

$\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=2\cdot 2-1=3\neq 0$.

例

求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x-7}{2x-1}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+x-7)=2^3+2-7=3$, $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=2\cdot 2-1=3\neq 0$. 故

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-7}{2x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+x-7)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)}=\frac{3}{3}=1.$$

随堂练习

求极限

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}$

(2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x+1}{x-2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x^3+1}$

随堂练习

求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{2x+1}=0\Longrightarrow\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-2}=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$

例

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x^2+1}$

例

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x^2+1}$

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^3-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0,$$

故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x^2+1}=\infty.$$

例

求 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^3+1}$

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^3+1}=0.$$

当 $x\to\infty$ 时，多项式分式函数的极限

设 $a_0\neq 0$ 且 $b_0\neq 0$, m 和 n 为非负整数

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

定理 6 (复合函数的极限运算准则)

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, 且存在 $\delta_0>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时有 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = A.$$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{\substack{u:=g(x)\to u_0\\(x\to x_0)}} f(u)$;
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{4}x^2=1$ 且 $\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\ln\left(\frac{1}{4}x^2\right)=0.$

证明.

由 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 知 $\forall \epsilon>0$, $\exists \bar{\delta}>0$, $\forall u\in \mathring{U}(u_0,\bar{\delta})$, 有

$$|f(u)-A|<\epsilon.$$

接下来只要证明 $\exists \delta>0$, $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$, 有 $g(x)\in \mathring{U}(u_0,\bar{\delta})$.

证明.

由 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$ 知 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \bar{\delta} > 0$, $\forall u \in \mathring{U}(u_0, \bar{\delta})$, 有

$$|f(u) - A| < \epsilon.$$

接下来只要证明 $\exists \delta > 0$, $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, 有 $g(x) \in \mathring{U}(u_0, \bar{\delta})$.
因为 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$, 故 $\exists \underline{\delta} > 0$, 使得 $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \underline{\delta})$, 有

$$|g(x) - u_0| < \bar{\delta}.$$

证明.

由 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 知 $\forall \epsilon>0$, $\exists \bar{\delta}>0$, $\forall u\in \mathring{U}(u_0,\bar{\delta})$, 有

$$|f(u)-A|<\epsilon.$$

接下来只要证明 $\exists \delta>0$, $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$, 有 $g(x)\in \mathring{U}(u_0,\bar{\delta})$.
因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 故 $\exists \underline{\delta}>0$, 使得 $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\underline{\delta})$, 有

$$|g(x)-u_0|<\bar{\delta}.$$

又因为当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时, $g(x)\neq u_0$. 故取 $\delta=\min\{\delta_0,\underline{\delta}\}$, 此时 $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$, 有

$$0<|g(x)-u_0|<\bar{\delta},$$

即 $g(x)\in \mathring{U}(u_0,\bar{\delta})$. $\square$

作业

- 教材习题 1-5: 1(1)(3)(7)(8)(9)(14); 2(3); 3(1); 5.